ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ РАСТВОРА В МЕРЗЛОМ ГРУНТЕ[1]

Авдякова С.М.

Казанский государственный университет

Рассматривается двумерная задача фильтрации раствора в мерзлом грунте. Математически эта задача формулируется в виде связной системы дифференциальных уравнений и включений в фиксированной области (прямоугольнике) Ω с границей $\partial\Omega$. Верхнюю и нижнюю стороны прямоугольника обозначим через Γ_0, левую и правую – через Γ_1 и Γ_2 соответственно.

В постановке задачи тепловые процессы описываются обобщенной задачей Стефана с температурой T фазового перехода, зависящей от концентрации. Изменение концентрации C примеси в жидкой фазе моделируется уравнением переноса (диффузионные члены не принимаются во внимание ввиду малости коэффициента диффузии). Течение раствора описывается квазистационарным уравнением в изменяющейся со временем области.

Итак, искомые функции T, C, μ, p удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial t}(T + L\mu) - \Delta T + \vec{V}\nabla T = f \quad \text{при } t > 0, x \in \Omega; \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu C) + \vec{V}\nabla C = 0 \quad \text{при } t > 0, x \in \Omega; \tag{2}$$

$$\mu \in H(T + C) \quad \text{при } t > 0, x \in \Omega; \tag{3}$$

$$div\vec{V} = 0, \vec{V} = -K(\mu)\nabla p \quad \text{при } t > 0, x \in \Omega; \tag{4}$$

где T – температура, C – концентрация примеси в растворе, $\mu \in [0,1]$ – относительная доля пор, занятых жидкостью, p – давление, $\vec{V} = (V_1, V_2)$ – вектор скорости, $f = q\delta(x - x_0)$, $\delta(x - x_0)$ – дельта-функция Дирака, q – мощность точечного источника холода, помещенного в точку x_0, L – скрытая теплота плавления, $H(t)$ – функция Хевисайда, $K(\mu)$ – коэффициент, зависящий от μ ($K(0) = 0$).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N 98-01-00200.

Начальные и граничные условия на границе $\partial\Omega$ фиксированной области имеют вид

$$C = C_0, T = T_0, \mu = 1 \quad \text{при} \quad t = 0;$$

$$C = C_0, T = T_0, \mu = 1 \quad \text{при} \quad t > 0, x \in \partial\Omega;$$

$$p = p_0 \quad \text{при} \quad t > 0, x \in \Gamma_1;$$

$$V_n = -K(\mu)\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, x \in \Gamma_0,$$

$$V_n = \phi(x_2) \quad \text{при} \quad t > 0, x \in \Gamma_1, \Gamma_2.$$

Построим неявную разностную схему для задачи (1) – (4). Мы будем использовать традиционные обозначения для сеточных областей и функций, в частности:

$$\overline{\omega}_h = \{x_{ij} = (ih, jh) | i = \overline{0,N}, j = \overline{0,M}\},$$

$$\partial\omega = \overline{\omega}_h \cap \partial\Omega, \omega_h = \overline{\omega}_h \backslash \partial\omega,$$

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_i = i\tau | i = \overline{0,N_1}\}, \omega_\tau = \overline{\omega}_\tau \backslash \{t = 0\}.$$

Далее под μ, C, T, p, V понимаем сеточные функции, аппроксимирующие соответствующие функции непрерывных аргументов $x = (x_1, x_2)$ и t.

Задачу (1) – (4) аппроксимируем неявной по времени разностной схемой с направленными разностями в конвективных членах на сетке $\overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$ с постоянными шагами. Разностная схема для внутренних узлов сетки имеет вид

$$-\sum_{i=1}^{2} V_{ix_i} = 0, V_i = -K(\mu)p_{\bar{x}_i}, \quad i = \overline{1,2}, x \in \omega_h, t \in \omega_\tau, \tag{5}$$

$$(T + L\mu)_{\bar{t}} - \Delta_h T + \sum_{i=1}^{2}(V_i^+ T_{\bar{x}_i} - V_i^- T_{x_i}) = f \quad x \in \omega_h, t \in \omega_\tau, \tag{6}$$

$$(\mu C)_{\bar{t}} + \sum_{i=1}^{2}(V_i^+ C_{\bar{x}_i} - V_i^- C_{x_i}) = 0 \quad x \in \omega_h, t \in \omega_\tau, \tag{7}$$

$$\mu \in H(T + C), x \in \omega_h, t \in \omega_\tau. \tag{8}$$

Здесь $V_i^+ = sup\{0; V_i\}$ и $V_i^- = sup\{0; -V_i\}$.

Сеточная задача (5) – (8) с соответствующими граничными условиями для фиксированного $t \in \omega_\tau$ решается итерационным методом, основанным на ее расщеплении на задачу фильтрации и задачу распространения тепла и примеси в грунте с итерационным уточнением функции μ. Алгоритм решения полученной сеточной задачи состоит из двух итерационных циклов: одного – для нахождения значений давления p и скорости V, второго – для определения значений температуры T, концентрации C примеси и относительной доли пор μ, занятых жидкостью. Весь алгоритм определения области промерзания можно представить следующим образом:

1. Присвоение начальных значений массивам давления $p_{i,j}$, температуры $T_{i,j}$, концентрации $C_{i,j}$ и относительной доли пор $\mu_{i,j}$.

2. Первый цикл. Решение уравнений задачи фильтрации (5) методом верхней релаксации с параметром $\omega = 1,8$. Выход из цикла осуществляется "по невязке". Далее находятся значения скорости по формуле $V_i = -K(\mu)p_{\bar{x}_i}$, $i = \overline{1,2}$ в каждой точке сетки.

3. Второй цикл. Решаем систему задач (6) – (8) методом поточечной релаксации с использованием полученных значений массива скоростей $V_{i,j}$. Для этого полагаем в каждой точке сетки $\mu_{i,j} = 1$, из уравнений (6) и (7) находим температуру $T_{i,j}$ и концентрацию $C_{i,j}$. Величина $\mu_{i,j}$ принимает истинное значение при выполнении условия $T_{i,j} + C_{i,j} > 0$, иначе решаем уравнение $T_{i,j} + C_{i,j} = 0$, которое является квадратным относительно $\mu_{i,j}$ и один из корней которого принадлежит отрезку $[0,1]$. Далее находим температуру $T_{i,j}$ и концентрацию $C_{i,j}$, используя вновь полученные значения $\mu_{i,j}$. В случае, если

$$||\mu_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}|| = \{max(\mu_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}) : 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq M\} < \epsilon,$$

где $\hat{\mu}_{i,j}$ есть начальные значения, $\epsilon < 10^{-3}$, происходит завершение второго цикла и осуществляется переход на новый временной слой, иначе –возвращение к пункту 2.

Были проведены серии расчетов по определению области промерзания, образуемой хладоисточником с заданной мощностью q. При заданном параметре $q = 6$ область промерзания вытягивается к правой границе, при параметре $q = 3$ эта область образуется только около источника холода.

ПОСТРОЕНИЕ БЕЗОТРЫВНО ОБТЕКАЕМОГО ПРОФИЛЯ С ОТБОРОМ ЖИДКОСТИ ИЗ ВНЕШНЕГО ПОТОКА

Белоусов С.Е.

НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарёва
Казанского государственного университета

Известно, что при обтекании замкнутого контура заданной длины потоком идеальной несжимаемой жидкости существует глобальный максимум циркуляции, превысить который на непроницаемых профилях нельзя.

Продвинуться в этом направлении можно, используя схемы обтекания тел, в которых несущие системы и двигатели составляют единый комплекс "крыло-движитель".

Примером реализации такого комплекса служит сформулированная и решённая Г.Ю.Степановым [1] задача о построении безотрывно обтекаемого тела с отбором жидкости из внешнего потока и выбросом струи в его кормовой части. На рис. 1 изображён искомый крыловой профиль, обтекаемый потоком идеальной несжимаемой жидкости со скоростью V_∞. Течение симметрично относительно оси Ax, поэтому показана только его половина. Верхнюю часть крылового профиля образуют прямолинейный отрезок AB и два участка постоянной скорости BC и $CDEF$ со значениями скорости $V = V_+ = const > V_\infty$ и $V = V_- = const < V_\infty$ соответственно. В кольцевой канал DC входит часть внешнего потока с расходом q. С таким же расходом и со скоростью струи V_j жидкость выходит из теоретически полубесконечного канала FE. Если скорость $V_j \neq V_\infty$, то линия тока EG становится линией разрыва скоростей. Для упрощения решения и ввиду малой кривизны границы FE канала и линии тока EG реальная струя ($V_j > V_\infty$) заменяется более широкой струёй с $V_j = V_\infty$, а нижняя граница канала отодвигается на расстояние $h = (1/V_\infty - 1/V_j)q$.